



УДК: 512.77 517.912

MSC 2010: 70Hxx, 70G65

Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости

Е. В. Ветчанин, И. С. Мамаев, В. А. Тененев

На основе совместного численного решения уравнений Навье – Стокса и уравнений движения проведено исследование характеристик движения твердого тела с переменным распределением внутренних масс в вязкой жидкости. Задача решена в нестационарной трехмерной постановке. Исследовалось движение сферы и каплеобразного тела в вязкой жидкости, вызываемое перемещением внутренних материальных точек, в поле силы тяжести. Показана возможность перемещения тела в произвольном заданном направлении.

Ключевые слова: конечно-объемный численный метод, уравнения Навье – Стокса, переменное распределение внутренней массы, управление движением

Получено 13 апреля 2012 года

После доработки 21 октября 2012 года

Работа выполнена в рамках гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (ФГБОУ ВПО «УдГУ», дог. № 11.G34.31.0039) и ФЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (1.2953.2011).

Ветчанин Евгений Владимирович

eugene186@mail.ru

Тененев Валентин Алексеевич

tenenev@istu.ru

Ижевский государственный технический университет

426069, Россия, г. Ижевск, ул. Студенческая, 7

Мамаев Иван Сергеевич

maev@rcd.ru

Институт компьютерных исследований;

Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижений

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН

117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

Институт математики и механики УрО РАН

620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16

Введение

Исследование движения тел в жидкости является классической областью гидродинамики. Первые работы в этой области были проведены в постановке идеальной жидкости. Если идеальная жидкость несжимаема и обладает однозначным потенциалом, то уравнения движения твердого тела представляют собой систему шести обыкновенных дифференциальных уравнений и отделяются от уравнений в частных производных, описывающих движение жидкости. В лагранжевой и гамильтоновой формах уравнения движения твердого тела при приведенных выше условиях были получены и изучены Кирхгофом и теперь их изучение составляет целый раздел динамики твердого тела [1]. Стационарные винтовые движения твердых тел в идеальной жидкости исследовались Ламбом [4]. Движение тела в поле тяжести изучались Чаплыгиным и Стекловым. Чаплыгин изучал также движение тела в жидкости при наличии циркуляции. С современным взглядом на различные аналитические и численные аспекты движения твердого тела в жидкости можно ознакомиться по книге [1] и работам [2, 3], где имеется также подробная библиография.

Одна из первых работ, посвященных исследованию движения тел в вязкой жидкости, связана с именем английского ученого Дж. Стокса (G. G. Stokes, 1851). Он первым получил аналитическое решение уравнений Навье–Стокса для ползущего течения вязкой несжимаемой жидкости около сферы. Его формула для силы сопротивления

$$F = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D, \quad (1)$$

где V — скорость, ρ — плотность жидкости, S — миделево сечение, C_D — коэффициент сопротивления.

Коэффициент сопротивления C_D , согласно Стоксу, задается выражением

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}}. \quad (2)$$

Данное решение было получено при полном пренебрежении инерционными силами, действующими на жидкость вблизи тела, и стандартная кривая сопротивления показывает, что данный закон справедлив для $\text{Re} < 1$ [5].

Решение Стокса уточнил Озеен (C. W. Oseen, 1910). Он указал, что недопустимо пренебрегать инерционными членами на большом расстоянии от сферы, даже если скорость сферы относительно невозмущенного потока мала [6]. Частичный учет инерционных членов был осуществлен введением малых возмущений в решение исходной задачи с пренебрежением членами второго порядка малости. В результате закон Озеена принимает вид

$$C_D = \frac{24}{\text{Re}} \left(1 + \frac{3}{16} \text{Re} \right). \quad (3)$$

Применимость закона (3) ограничивается условием $\text{Re} < 5$ [5]. Ламб показал, что решение Озеена «хуже» вблизи поверхности сферы [6].

Исследование режимов обтекания сферы при различных значениях Re проводилось в работе [7] методом прямого численного моделирования. Был проведен анализ топологии течения при различных значениях Re , воспроизведен ламинарно-турбулентный переход при $\text{Re} > 10^5$. Экспериментальные результаты по взаимодействию движущейся сферы с вихревым кольцом имеются в [8]. Теоретический анализ продвижения сферы в жидкости и взаимодействия с вихревыми структурами приведен в работе [9].

Отметим, что современная вычислительная техника и численные методы дают возможность решения полных уравнений Навье–Стокса для тел со сложной геометрией и различными граничными условиями относительно жидкости.

Более сложной является задача о движении геометрически изменяемого тела в жидкости. Она восходит к Хиксу, но снова была инициирована математической биологией и биомеханикой при выявлении особенностей движения рыб и микроорганизмов. Укажем лишь некоторые из большого числа публикаций, посвященных этому вопросу (здесь имеется также ряд роботизированных прототипов, например Robotuna). Задача о самопродвижении деформируемого тела в идеальной среде изучалась в работе [10]. Вопросы устойчивости движения деформируемого тела в идеальной жидкости в приложении к задаче об N сферах рассматривались в работе [11]. Эти N сфер рассматриваются как деформируемое тело. Показано, что устойчивостью движения такой системы можно управлять за счет подходящей деформации. Приводится приложение к исследованию явления кластеризации, всплывающих пузырьков газа в суспензии.

Гидродинамика и устойчивость изменяемого тела в идеальной среде вблизи твердой границы рассматривалась в работе [12]. Возможности используемого метода демонстрируются на задаче о пульсации сферического пузырька около твердой сферической поверхности. В уже ставшей теперь классической работе Лайтхилла [13] на основе формулы Стокса было проведено исследование движения деформируемой сферы при малых числах Рейнольдса. Рассматривались различные виды деформации: радиальное сжатие–растяжение, переход из сферы в эллипсоид, движение точек сферы по касательной. В работе [14] рассматривается движение микроорганизмов при большой вязкости. Оценивается скорость движения за счет распространения волн малой амплитуды.

В работах [15, 16] было рассмотрено прямолинейное движение тел за счет колебаний присоединенных звеньев — аналог плавника у рыб. Для исследования используется феноменологическая модель диссипации, при которой силы сопротивления жидкости считаются пропорциональными квадрату скорости с постоянным коэффициентом сопротивления. Масса присоединенных подвижных звеньев считалась пренебрежимо малой.

Экспериментальное исследование движения жидкости, окружающей микроорганизм, проводилось в работе [17]. В результате измерений были получены скоростные характеристики жидкости, а также величина механической энергии, рассеиваемой организмом при движении.

Для численного исследования движения широкое распространение получил метод погруженных границ (*immersed boundary method*). В работе [18] предлагается метод численного исследования гидродинамики плывущего тела. Приводятся результаты численного моделирования обтекания червя на основе трехмерных уравнений Навье–Стокса. В работе [19] проведено расчетное исследование движения медуз на основе уравнений Навье–Стокса в осесимметричной постановке на деформируемых сетках. В работе [20] изучается плоское движение трехзвенного тела методом вихревых частиц, предложенным в [21].

В этой работе мы исследуем другой, видимо не задействованный в природе, вид передвижения, осуществляемый за счет перемещения внутренних масс по некоторым заданным законам. Характеристики движения внутренних масс возможно подобрать таким образом, чтобы перемещение тела происходило в заданном направлении. Главным преимуществом таких систем является слабое воздействие на окружающую среду из-за отсутствия внешних движителей, таких как винты, лопасти или плавники. Данный способ приведения в движение может быть использован в робототехнике для создания бесшумных, маневренных средств передвижения.

Такой способ перемещения возможен как по поверхности жидкости, так и внутри нее. Приведение управляющих масс в движение должно осуществляться виброприводом, который, как отмечено в работе [22], обладает простотой и высокой надежностью. Системы с внутренними массами при различных законах трения изучались в работе [23]. Получены оптимальные периодические движения управляющих тел. Вязкое трение, как и в работах [15, 16], задавалось пропорциональным квадрату скорости.

В работе [24] рассматриваются вопросы, связанные с движением мобильного робота, перемещающегося за счет периодических колебаний внутренних масс, встроенных в его корпус. Взаимодействие робота со средой, в которой он движется, осуществляется за счет четырех опорных поплавков с управляемым изменением угла наклона. Силы вязкого сопротивления рассчитываются по методике, полученной экспериментальным путем.

Гидродинамика тела с внутренней массой и жесткой оболочкой изучалась в недавней работе [25]. На основе решения уравнений Навье–Стокса в форме «функция тока–завихренность» были получены картины обтекания тела в жидкости, зависимости вязких сил, сил давления и максимальных скоростей от числа Рейнольдса. Аналогичные результаты были получены для тела с внутренней массой и деформируемой оболочкой. Изменение формы задавалось по некоторому закону без учета влияния гидродинамических сил на процесс деформации.

Двумерные задачи движения тел эллиптической и круговой формы с внутренними массами в безграничном объеме жидкости изучались в работе [26]. Уравнения Навье–Стокса решались численно проекционным методом совместно с уравнениями динамики твердого тела. Были получены фазовые траектории сил и импульсов, показаны отличия движения тел в вязкой жидкости от движения в идеальной.

Задача управления движением тела с внутренними массами рассматривалась в работе [27]. Для обеспечения движения тела вблизи заданной траектории решалась задача оптимального управления типа Лагранжа, которая решалась генетическим алгоритмом с вещественным кодированием. Чтобы избежать многократного решения уравнений Навье–Стокса, задача управления решалась на основе серии параметрических расчетов. В результате были получены аппроксимационные зависимости для сил действующих на тело; зависимости строились с использованием технологии Data Mining.

Здесь мы рассматриваем трехмерную вязкую гидродинамику движения тела с переменным распределением массы. В разделе 2 приведена математическая модель, описывающая движение тела с внутренними массами и окружающей жидкости. В разделе 3 описан используемый численный метод. В разделе 4 показаны результаты верификации метода расчета. В разделе 5 приведены результаты расчета движения тела с нулевой плавучестью за счет перемещения внутренних масс. В разделе 6 показана возможность преодоления силы тяжести за счет колебаний внутренней массы.

1. Уравнения движения

Рассмотрим пространственное движение тела с изменяемой геометрией масс. Тело имеет материальную оболочку неизменной формы и массу M . Внутри оболочки по заданным законам движения $\rho_k(t)$, $\dot{\rho}_k(t)$ перемещаются материальные точки с массами m_k , $k = \overline{1, N}$. Движение тела и системы материальных точек относится к двум декартовым системам координат: неподвижной $Oxyz$ и подвижной $O_1\xi\eta\zeta$ (рис. 1). Точка O_1 является центром масс оболочки-тела.

Уравнения движения, описывающие движение системы материальных точек, приведены в работе [28].

Введем обозначения: $\mathbf{U} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \left(v_1 = \frac{dx}{dt}, v_2 = \frac{dy}{dt}, v_3 = \frac{dz}{dt}\right)^T$ — вектор скорости точки O_1 ; $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости вращения тела; $\dot{\rho} = \left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right)^T$ — векторы движения материальных точек. Векторное уравнение для импульса \mathbf{P} тела, движущегося в вязкой среде [29], следующее:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}_1 = \mathbf{F}_R(t), \quad (1.1)$$

где \mathbf{F} — вектор силы, действующей на жесткую оболочку.

Для кинетического момента \mathbf{K} тела имеем уравнение

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K}_1 + \mathbf{U} \times \mathbf{P}_1 = \mathbf{G}_R(t), \quad (1.2)$$

где \mathbf{G} — момент сил, действующих на жесткую оболочку.

Выражения для импульса системы тел \mathbf{P}_1 и кинетического момента \mathbf{K}_1 имеют вид

$$\mathbf{P}_1 = \left(M + \sum_{k=1}^N m_k\right) \mathbf{U} + \sum_{k=1}^N m_k \dot{\rho}_k + \sum_{k=1}^N m_k \boldsymbol{\Omega} \times \rho_k, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \Lambda_1 \mathbf{U}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{D} \boldsymbol{\Omega} + \sum_{k=1}^N m_k \rho_k \times (\boldsymbol{\Omega} \times \rho_k) + \sum_{k=1}^N m_k \rho_k \times \dot{\rho}_k + \sum_{k=1}^N m_k \rho_k \times \mathbf{U}, \quad (1.5)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \Lambda_2 \boldsymbol{\Omega}, \quad (1.6)$$

где \mathbf{D} — тензор моментов инерции жесткого тела, Λ_1 — тензор присоединенных масс, Λ_2 — тензор присоединенных моментов инерции.

Движение тела предполагается из состояния покоя, то есть $\mathbf{P}(0) = 0$, $\mathbf{K}(0) = 0$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1), (1.2) и алгебраических уравнений (1.4), (1.6) решается численно. Для определения координат положения центра масс в неподвижной системе координат дополнительно решается система уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_c}{dt} &= (\mathbf{U}, \alpha), & \frac{d\alpha}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \alpha &= 0, \\ \frac{dy_c}{dt} &= (\mathbf{U}, \beta), & \frac{d\beta}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \beta &= 0, \\ \frac{dz_c}{dt} &= (\mathbf{U}, \gamma), & \frac{d\gamma}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \gamma &= 0 \end{aligned}$$

с начальными условиями $\alpha(0) = (1, 0, 0)^T$, $\beta(0) = (0, 1, 0)^T$, $\gamma(0) = (0, 0, 1)^T$, $x_c(0) = x_{c0}$, $y_c(0) = y_{c0}$, $z_c(0) = z_{c0}$, где α , β , γ — единичные векторы, направленные вдоль осей x , y , z .

Правые части уравнений (1.1), (1.2) содержат силу, с которой жидкость действует на жесткую оболочку, и ее момент, для определения которых необходимо решение полной

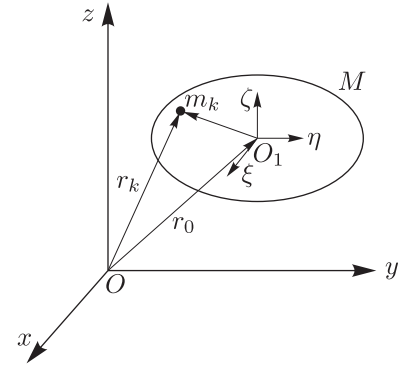


Рис. 1. Системы координат.

системы уравнений Навье–Стокса. В подвижной системе координат, связанной с телом, уравнения гидродинамики имеют вид [29]

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla(\mathbf{V} - \mathbf{W})\mathbf{V} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}, \quad (1.8)$$

где $\mathbf{V} = (u, v, w)^T$ — вектор абсолютной скорости жидкости, p, ρ, ν — давление, плотность и кинематический коэффициент вязкости. В уравнениях (1.7), (1.8) все векторы $\mathbf{V}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\Omega}$ записаны в проекциях на подвижную систему координат.

Для системы уравнений (1.7), (1.8) на поверхности тела задавались граничные условия

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{V} = \mathbf{n} \times (\mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_s),$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0,$$

на внешней границе области $p = 0$, $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$.

Здесь $\mathbf{W} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_1$ — вектор переносной скорости частицы жидкости в точке r_1 . Силы реакции жидкости на тело и момент сил определяются интегралами по поверхности [29]

$$\mathbf{F}_R(t) = \int_S \left[-p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \right] \cdot \mathbf{n} ds, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{G}_R(t) = \int_S \mathbf{r}_s \times \left[-p\mathbf{I} + \rho\nu(\nabla\mathbf{V} + \nabla\mathbf{V}^T) \right] \cdot \mathbf{n} ds. \quad (1.10)$$

2. Численный метод

Для численного решения уравнений (1.1), (1.2) использовался явный метод Рунге–Кутты. Уравнения (1.7), (1.8) решались на сферической конечно-объемной неразнесенной сетке с помощью метода, предложенного в [29, 30]. Гидромеханические параметры определялись в центрах конечных объемов:

$$\frac{\hat{V}_i^k - \hat{V}_i^{k-1}}{\Delta t} = \gamma_k \mathcal{N}(\hat{V}_i^{k-1}) + \zeta_k \mathcal{N}(\hat{V}_i^{k-2}) +$$

$$+ (\alpha_k + \beta_k) \left[\mathcal{L}(\hat{V}_i^{k-1}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \right] + \beta_k \mathcal{L}(\hat{V}_i^k - \hat{V}_i^{k-1}), \quad (2.1)$$

где $\hat{V}_i^0 = V_i^n$, операторы \mathcal{N} и \mathcal{L} имеют вид

$$\mathcal{N}(\hat{V}_i^k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \hat{V}_j^k}{\partial x_i} \right) - \nu \frac{\partial^2 \hat{V}_j^k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left((\hat{V}_i^k - W) \hat{V}_j^k \right) + \hat{V}_i^k \frac{\partial \hat{V}_j^k}{\partial x_j} - \boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{V}}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}(\hat{V}_i^k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \hat{V}_i^k}{\partial x_j} \right). \quad (2.3)$$

Коэффициенты $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \zeta_k$, согласно [31], следующие:

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{4}{15}, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \frac{1}{15}, \quad \alpha_3 = \beta_3 = \frac{1}{6},$$

$$\gamma_1 = \frac{8}{15}, \quad \gamma_2 = \frac{5}{12}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{4}, \quad \zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = -\frac{17}{60}, \quad \zeta_3 = -\frac{5}{12}.$$

Предсказанные значения \hat{V}_i^3 используются для расчета потенциала

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial \hat{V}_i^3}{\partial x_i}, \quad (2.4)$$

с помощью которого корректируются поля скорости и давления

$$\bar{p}^{n+1} = p^n + \phi, \quad (2.5)$$

$$\bar{V}_i^{n+1} = \hat{V}_i^3 - \Delta t \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (2.6)$$

По значениям $\bar{p}^{n+1}, \bar{V}_i^{n+1}$ рассчитывается сила сопротивления и ее момент (1.9), (1.10). Полученные значения силы сопротивления и момента используются для определения поступательной и вращательной скоростей тела в момент времени t^{n+1} . Для того чтобы поля скорости и давления удовлетворяли кинематическим граничным условиям в новый момент времени, необходимо решить уравнение Лапласа для поправки δp с граничным условием на поверхности тела [29]

$$\mathbf{n} \cdot \nabla(\delta p) = -\frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{n} \cdot \Delta \mathbf{V}, \quad (2.7)$$

где \mathbf{n} — вектор внешней единичной нормали к поверхности движущегося тела. Новые скорректированные параметры вычисляются следующим образом:

$$p^{n+1} = \bar{p}^{n+1} + \delta p, \quad (2.8)$$

$$V_i^{n+1} = \bar{V}_i^{n+1} - \Delta t \frac{\partial \delta p}{\partial x_i}. \quad (2.9)$$

Для предотвращения нефизичных осцилляций используется процедура интерполяции с участием градиентов давления [32]. Скорости на гранях конечных объемов обозначим $\mathbf{U}_f = (U_x, U_y, U_z)^T$. Для вычисления этих величин используется следующая процедура осреднения:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{V}} + \Delta t \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right)_{cc}, \quad (2.10)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_f = I(\tilde{\mathbf{V}}_i, \tilde{\mathbf{V}}_j), \quad (2.11)$$

$$\hat{\mathbf{U}}_f = \tilde{\mathbf{U}}_f - \Delta t \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right)_{fc}, \quad (2.12)$$

где I — оператор интерполирования величин из соседних ячеек на общую грань; индексы cc, fc обозначают градиенты давления, вычисленные в центре ячейки и на грани соответственно; i, j — номера ячеек сетки. Введение дополнительного массива скоростей на гранях конечных объемов позволяет имитировать разнесенную сетку и определять основные гидромеханические параметры в ячейках сетки.

Для вычисления градиента давления в ячейках используется формула Гаусса [33, 34], примененная к конкретному конечному объему

$$\nabla \phi_i = \frac{1}{V_i} \sum_j \mathbf{n}_{ij} s_{ij} \phi_{ij}, \quad (2.13)$$

где V_i — величина i -й ячейки, s_{ij} — грань между i -й и j -й ячейками сетки, \mathbf{n}_{ij} — орт внешней нормали к грани s_{ij} , ϕ_{ij} — значение ϕ на ij -й грани.

Для равномерной декартовой сетки формула (2.13) приводит к центральной разности, что неблагоприятно сказывается на процессе вычислений. При высоких числах Re даже при использовании интерполяции (2.10)–(2.12) возможно получить нефизичное шахматное распределение гидромеханических параметров [35].

Для устранения этих проблем градиенты вычисляются по формуле наименьших квадратов [34]

$$\mathbf{G}_i = \sum_j w_{ij}^2 \mathbf{d}_{ij} \mathbf{d}_{ij}, \quad (2.14)$$

$$\nabla \phi_i = \sum_j w_{ij} \mathbf{G}_i^{-1} \cdot \mathbf{d}_{ij} (\phi_j - \phi_i), \quad (2.15)$$

где \mathbf{d}_{ij} — вектор, направленный из i -й ячейки в j -ю, w_{ij} — весовая функция равная $1/|\mathbf{d}_{ij}|$.

На вытянутых ячейках формула (2.15) дает лучшие результаты, нежели формула Гаусса. Для невытянутых ячеек обе формулы дают примерно одинаковые результаты.

3. Верификация метода решения

Применяемый метод имеет второй порядок по времени и по пространственным координатам. Тестирование метода проводилось на задаче о движении сферы в несжимаемой жидкости при $Re = 1000$. Сфера имеет постоянную скорость $\mathbf{V} = (0, 0, 1)$. На рисунке 2 показано векторное поле течения около сферы.

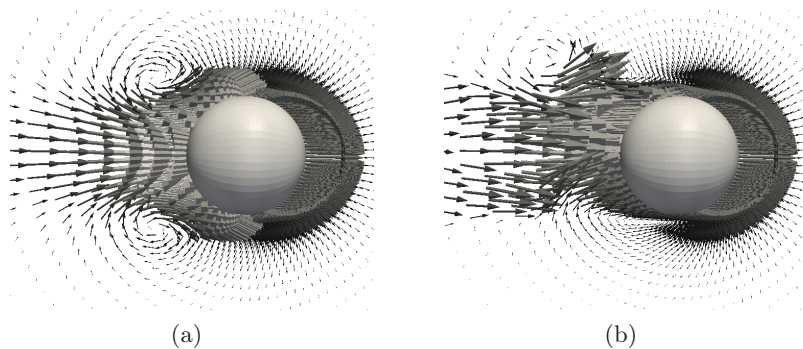


Рис. 2. Поле скорости при $t = 20$ и $t = 40$.

Рисунок 2а соответствует моменту времени $t = 20$. Течение около сферы симметричное и регулярное. В кормой части образуется кольцевой вихрь.

В процессе эволюции течения симметрия нарушается. На рисунке 2б показано течение в момент $t = 40$ с отрывом вихрей с кормы тела. Отрывы вихрей влекут за собой колебания силы сопротивления во всех трех координатных направлениях.

На рисунке 3 показаны изоповерхности завихренности $\nabla \times \mathbf{V}$ около сферы в различные моменты времени после нарушения симметрии течения. Как видно из рисунка 3, течение за сферой является нерегулярным из-за отрывов вихрей. Отрывы происходят в обоих поперечных направлениях.

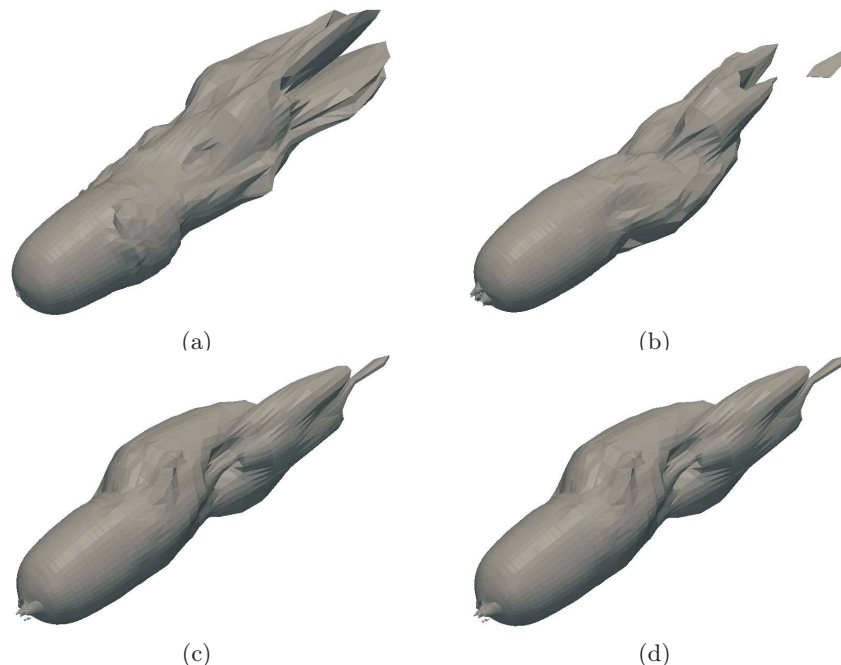


Рис. 3. Изоповерхности завихренности при $t = 40$ (a), $t = 50$ (b), $t = 60$ (c), $t = 70$ (d).

На рисунке 4а показаны составляющие силы сопротивления. Соответствующие коэффициенты сопротивления и подъемной силы $F_l = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ приведены на рисунке 4б.

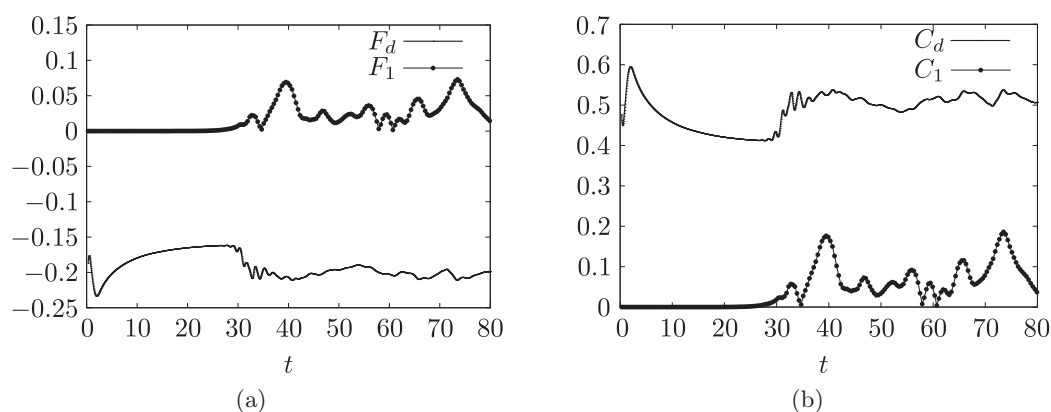


Рис. 4. Составляющие силы (a) и коэффициенты сопротивления (b).

Коэффициент сопротивления на регулярном участке процесса $C_d = 0.43$, что соответствует экспериментальным данным [5]. Число Струхала $St = fd/V$, где f — частота схода вихревых колец, d — диаметр сферы, V — скорость движения, вычисляется по колебаниям подъемной силы. Считается, что одному сходу вихревого кольца соответствует два противоположных пика F_l . Отрывы вихрей начинаются примерно с момента $t = 30$, $St = 0.17$,

средний коэффициент сопротивления $\overline{C}_d = 0.53$, что согласуется с данными, приведенными в [7]. Колебания сил сопротивления происходят с непостоянной частотой во всех пространственных направлениях. Это связано с трехмерной нерегулярной природой гидродинамики, что указывает на необходимость моделирования трехмерного течения даже для осесимметричной задачи.

Подобные колебания сил происходят, например, при падении тела в воде. За счет отрывов вихрей траектория падающего тела отклоняется от прямой. Было промоделировано падение шара (радиус 0.1 и плотность 1100) под действием силы тяжести против оси Ox . Траектория движения показана на рисунке 5.

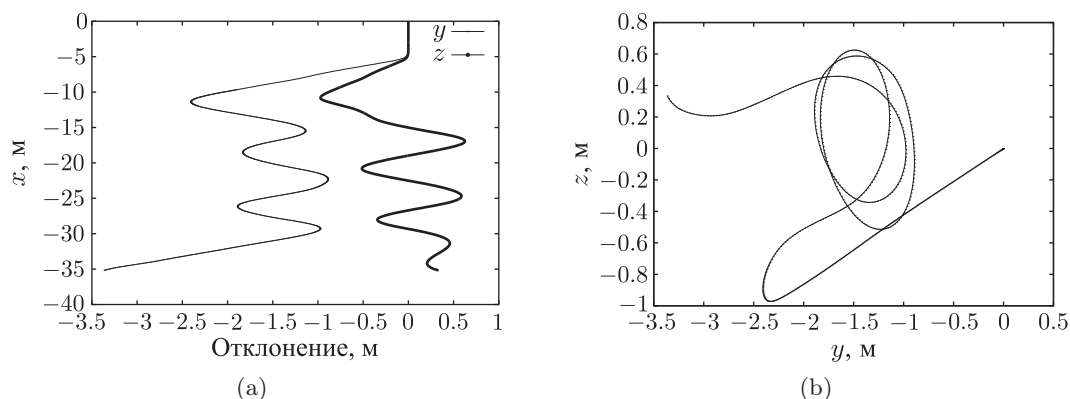


Рис. 5. Траектория за 60 с в плоскостях yOx и zOx (a), yOz (b).

На движение тела сильное влияние может оказывать сила Магнуса [36], возникающая в результате вращения сферы. Вращение сферы вызвано несимметричными отрывами вихрей, приводящими к несимметричному распределению вязких сил и к появлению крутящего момента. На рисунке 6 показаны угловые скорости вращения тела, приведенные к неподвижной системе координат.

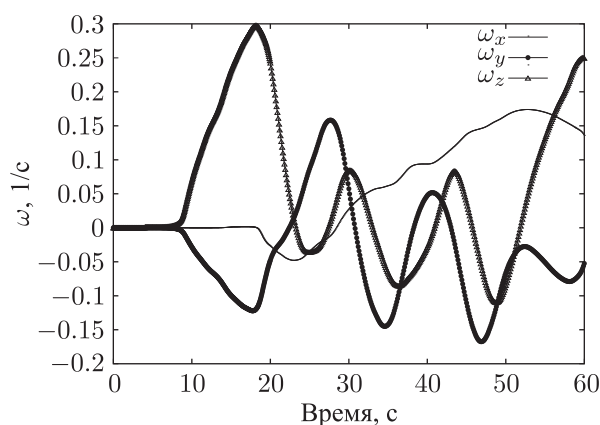


Рис. 6. Угловые скорости вращения тела.

Силы, действующие на падающий шар, показаны на рисунке 7.

Таким образом, при медленном погружении шара с плотностью, незначительно отличающейся от плотности жидкости, возможно отклонение движения от вертикальной траектории.

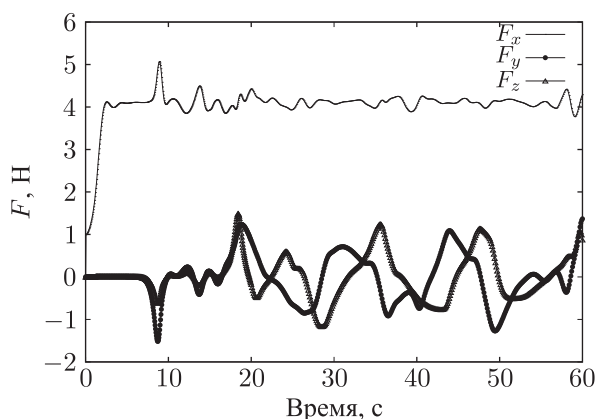


Рис. 7. Силы, действующие на шар.

4. Движение шара с переменной геометрией масс без силы тяжести

Рассмотрим сферическое тело с массой M и с нулевой плавучестью. Закон движения внутренней массы зададим в виде $\rho_1(t) = (\xi_1(t) - \xi_0, 0, 0)^T$, где

$$\xi_1(t) = \begin{cases} \rho \sin^2(\omega_1 \tau / k), & \tau < \frac{k\pi}{2\omega_1}, \\ \rho \cos^2(\tau/k - \frac{\pi}{2\omega_1}), & \tau \geq \frac{k\pi}{2\omega_1}, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\tau = t - \left(\left[\frac{t}{T_0} \right] \right) T_0, \quad T_0 = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{\omega_1} \right) k,$$

где k — регулирует частоту колебаний, ω_1 — коэффициент асимметрии колебаний, ξ_0 — смещение.

В идеальной жидкости тело будет совершать колебательное движение с постоянной амплитудой относительно первоначального положения. В вязкой жидкости в силу вязкого трения сила сопротивления жидкости изменяется нелинейно при движении тела с переменной скоростью. При $\omega_1 > 1$ колебания будут несимметричными и тело будет проходить некоторое расстояние за каждый период колебания. На рисунке 8 показано перемещение тела, отнесенное к диаметру, по оси x в случаях идеальной и вязкой жидкостей при $\omega_1 = 4$ и различных k .

Движение тела рассматривалось в воде; приведем значения расчетных параметров для данной среды. Кинематический коэффициент вязкости $\nu = 10^{-6}$, плотность среды $\rho = 1000$, радиус сферы $r = 0.1$, масса основного тела $M = 2.188$, масса внутренней материальной точки $m_1 = 2$. Как видно из рисунка 8, за каждый период колебания происходит увеличение максимального перемещения. При более высокой частоте колебания тело перемещается быстрее.

Картина течения около колеблющегося тела приведена на рисунке 9. При движении влево вокруг тела образуется опоясывающий вихрь (рис. 9а). При торможении и смене направления движения опоясывающий вихрь вытесняется вновь образующимся вихрем противоположного направления (рис. 9б, с, д). Вытесненный вихрь по мере эволюции течения растягивается и затухает вдали от тела.

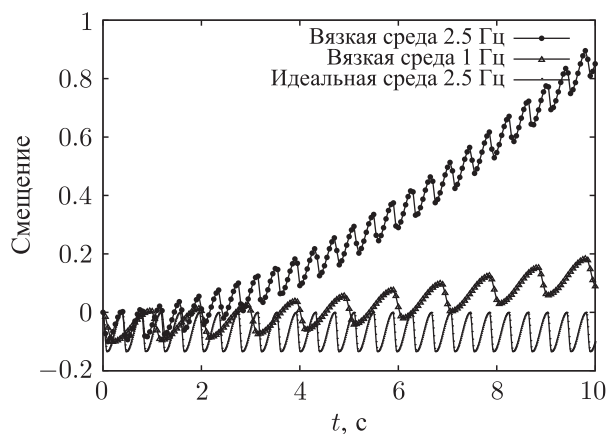


Рис. 8. Перемещение тела.

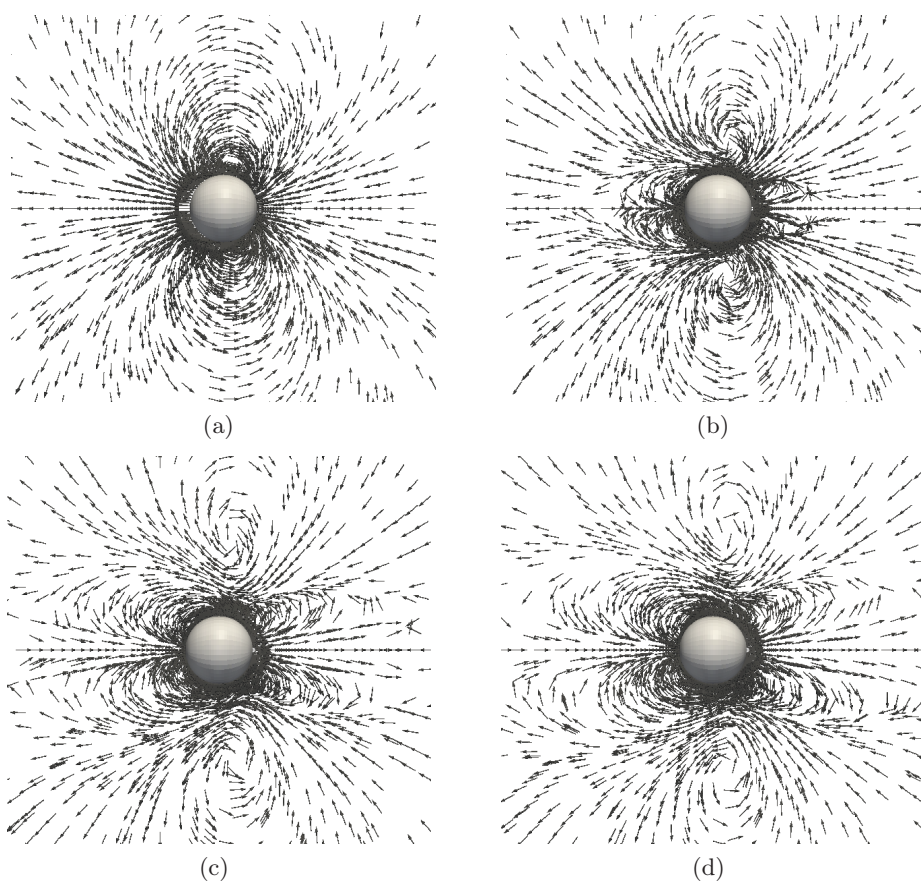


Рис. 9. Картина течения в моменты времени 0.1 (a), 0.197 (b), 0.198 (c), 0.199 (d).

Рассмотрим распределение давления на сфере в различные моменты движения (рис. 10). В момент времени $t = 0.097$ тело достигает максимальной скорости в отрицательном направлении (-0.162611 м/с), после чего начинается торможение тела. Давление в кормовой части (180°) повышается из-за натекания возмущенной жидкости, а в лобовой (0°) — понижается из-за оттока жидкости от тела. В момент времени $t = 0.107$ скорость тела составляет -0.160722 м/с, при $t = 0.15$ становится -0.108252 м/с.

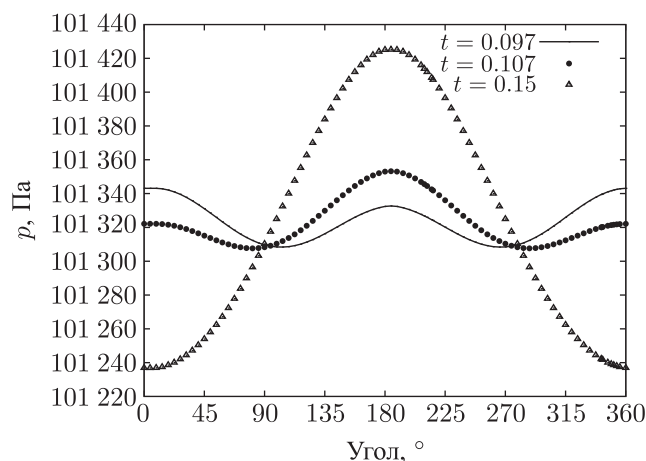


Рис. 10. Давление при торможении тела.

На рисунке 11 приведены кривые давления после смены направления движения в моменты времени $t = 0.197$ (0.0021449 м/с), $t = 0.198$ (0.00219088 м/с), $t = 0.199$ (0.00238052 м/с). При разгоне в положительном направлении движущееся тело должно проталкивать жидкость, что ведет к повышенному давлению в точке 180° и пониженному в точке 0° , но по мере разгона жидкость приводится в движение и ее давление на указанные точки ослабевает.

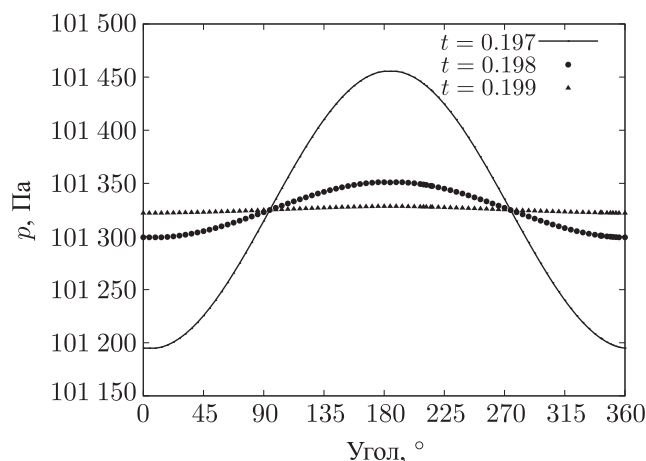


Рис. 11. Давление при смене направления движения.

Представляют интерес тела несферической формы, например, каплеобразные (рис. 12). Для такого тела силы сопротивления зависят от направления движения. Коэффициент сопротивления для капли, движущейся в направлении острия (C_D^f) и в направлении основания (C_D^b), приведены в таблице 1. Для сравнения приведен коэффициент сопротивления сферы C_D^s .

Как видно из таблицы 1, при высоких значениях Re коэффициенты сопротивления различаются в зависимости от направления движения, причем при движении основанием вперед коэффициент сопротивления ниже.

Был проведен расчет движения каплеобразного тела с радиусом основания $r_b = 0.045$, массой 0.626. Внутренняя масса величиной 0.3 двигалась по закону (4.1) при $\omega_1 = 4$, $k = 0.2$,

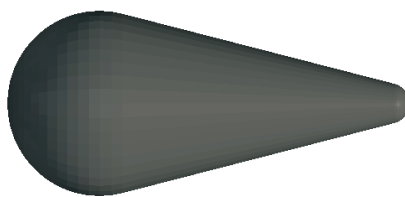


Рис. 12. Каплеобразное тело.

Таблица 1. Коэффициенты сопротивления

Re	0.9	9	90	900	9 000	90 000
C_D^f	43.13	5.58	1.4	0.635	0.476	0.425
C_D^b	43.13	5.64	1.4	0.599	0.367	0.305
C_D^s	30	5	1.2	0.5	0.4	0.42

$r_1 = 0.09$ и $\xi_0 = 0.045$. На рисунке 13 показаны отнесенные к диаметру основания перемещения каплеобразного тела и сферического с одинаковой массой и миделевым сечением.

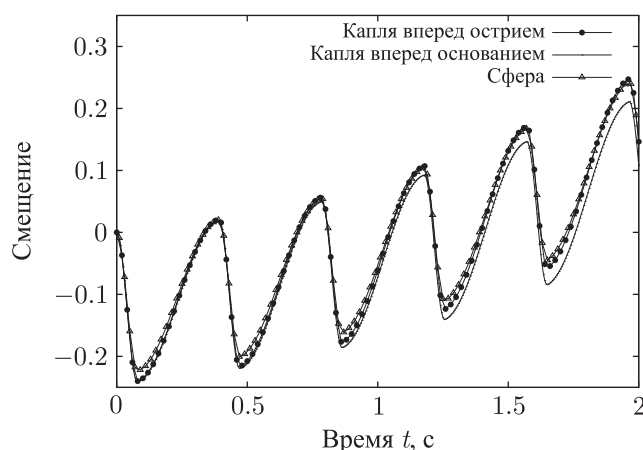


Рис. 13. Перемещения сферического и каплеобразных тел.

Кривая, названная «капля вперед острием», соответствует случаю, когда первая фаза закона (4.1) совершается в направлении острия, а вторая фаза — в направлении основания. Соответственно, для кривой «капля вперед основанием» первая фаза совершается в направлении основания, а вторая — в направлении острия.

Как видно из рисунка 13, качественно картина движения не изменилась. На начальном участке кривые для продвижения основанием и острием вперед совпадают, однако постепенно капля, продвигающаяся острием вперед, начинает опережать каплю, продвигающуюся основанием вперед. Поскольку кривые проходят очень близко, то рассмотрим увеличенные фрагменты графика 13, приведенные на рисунке 14.

Из рисунка 14а видно, что каплеобразное тело, которое продвигается в направлении острия, откатывается назад сильнее, чем сферическое, однако при продвижении вперед капля обгоняет сферу на незначительное расстояние, что видно из рисунка 14b.

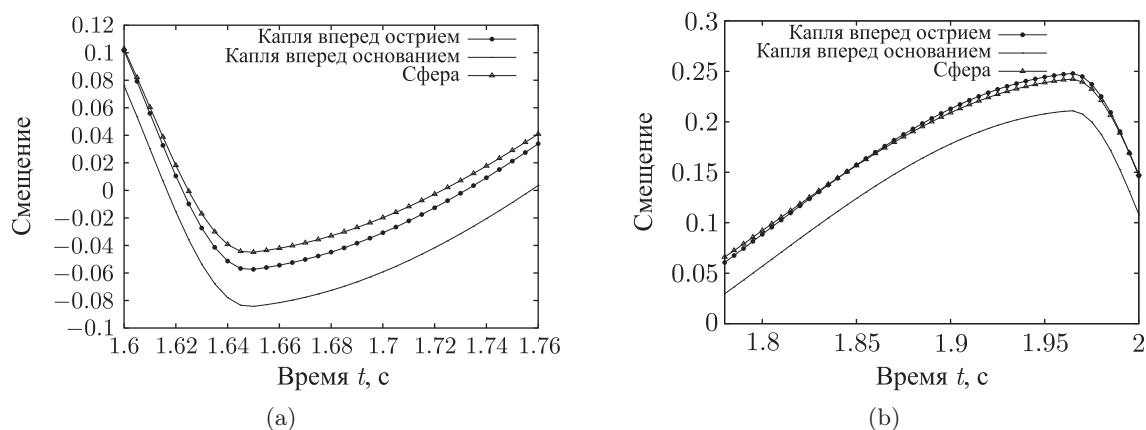


Рис. 14. Перемещения сферического и каплеобразных тел: (а) откат тел назад, (б) продвижение тел вперед.

Большой откат капли назад и большее продвижение вперед связаны с действующими на тела со стороны жидкости силами сопротивления. Характер сил сопротивления показан на рисунках 15 и 16.

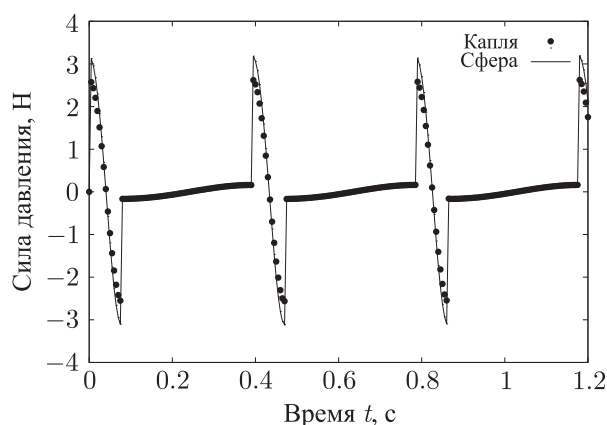


Рис. 15. Сила давления.

Суммарная сила сопротивления показана на рисунке 17.

При смене направления движения или при начале движения возникают пиковые значения силы давления. На сферическое тело давление действует сильнее, чем на каплеобразное (рис. 15). Давление создает большее сопротивление, когда внутренняя масса сдвигается быстро и тело имеет большую скорость. Вязкая сила изменяется во времени более плавно по сравнению с силой давления (рис. 16). По величине пиковые значения вязких сил на порядок меньше, чем пиковые значения сил давления.

Изменение поступательной скорости во времени приведено на рисунке 18.

Из рисунка 18 видно, что во время первой фазы движения (условие $\tau < \frac{k\pi}{2\omega_1}$ в формуле (4.1)) тело приобретает высокую скорость. Во время второй фазы, при медленном возвращении точки в начальное положение (условие $\tau \geq \frac{k\pi}{2\omega_1}$ в формуле (4.1)), тело движется в противоположном направлении с небольшой скоростью.

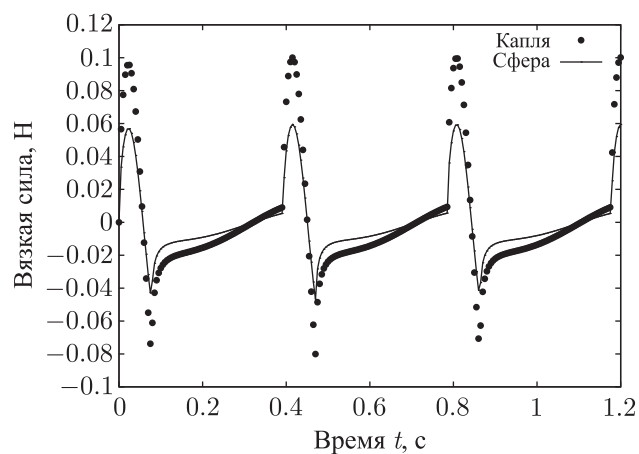


Рис. 16. Вязкая сила.

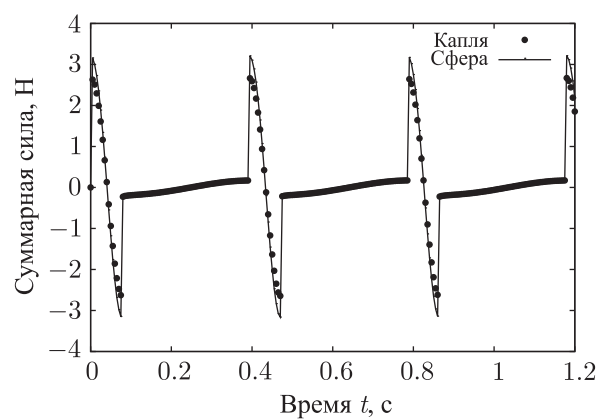


Рис. 17. Суммарное сопротивление.

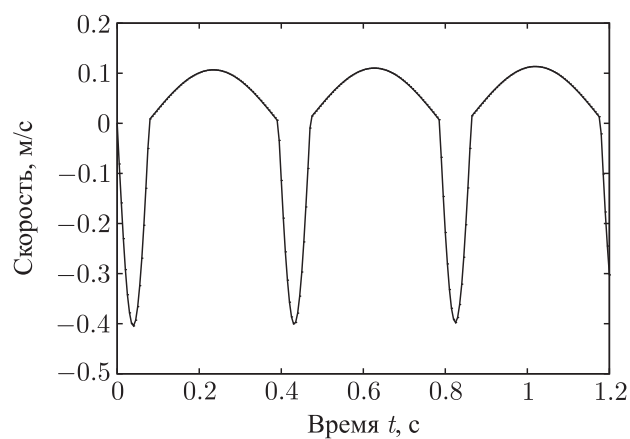


Рис. 18. Характер изменения скорости тела.

5. Движение шара с переменной геометрией масс в поле силы тяжести

Эффект продвижения тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости можно использовать для преодоления силы тяжести.

Рассмотрим шар с плотностью ρ_b и радиусом $r = 0.1$ в жидкой среде с плотностью $\rho = 1000$ и кинематическим коэффициентом вязкости $\nu = 10^{-6}$. Масса внутренней материальной точки 2. Закон движения внутренней массы задается (4.1), $\omega_1 = 4$. Для некоторых значений ρ_b и частот колебаний внутренней массы ниже приведены графики перемещения тела, отнесенного к диаметру.

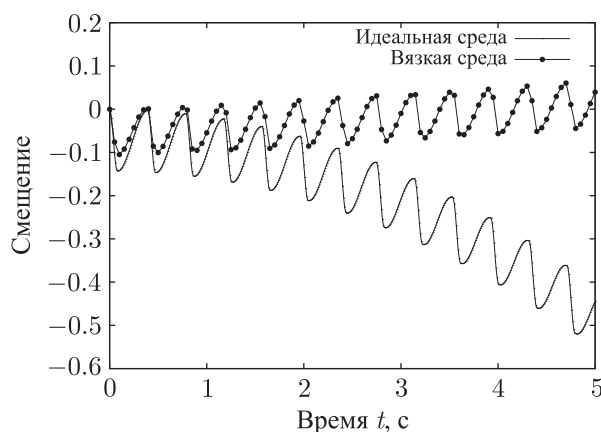


Рис. 19. Перемещение тела в поле силы тяжести ($\rho_b = 1001$, 2.5 Гц).

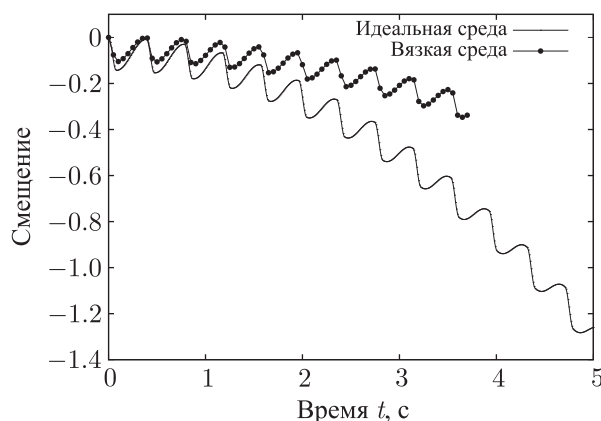
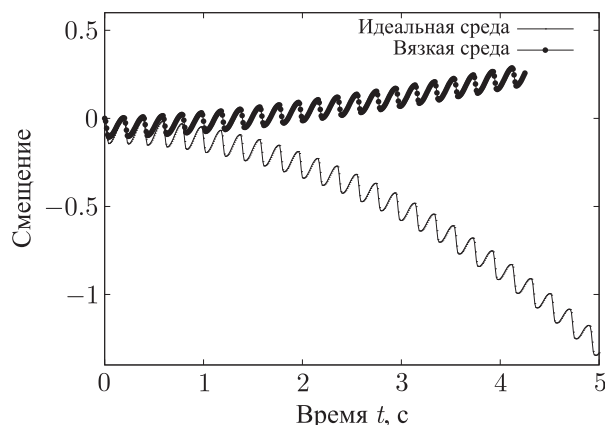


Рис. 20. Перемещение тела в поле силы тяжести ($\rho_b = 1003$, 2.5 Гц).

В идеальной жидкости, как и ожидалось, тело тонет. При $\rho_b = 1001$ и частоте 2.5 Гц тело начинает постепенно всплывать. При $\rho_b = 1003$ и частоте 2.5 Гц не удается противодействовать силе тяжести.

При повышении частоты колебаний внутренней массы до 5 Гц тело всплывает. Можно сделать вывод: чем большую массу нужно поднять, тем выше должна быть частота колебаний внутренней массы.

Представляет интерес перемещение тела не только против силы тяжести, но и в других направлениях. Рассмотрим тело с $\rho_b = 1000$. Сила тяжести направлена по оси Ox неподвиж-

Рис. 21. Перемещение тела в поле силы тяжести ($\rho_b = 1003$, 5 Гц).

ной системы координат, колебания внутренней массы совершаются по оси $O\eta$ с частотой 2.5 Гц. Траектория движения показана на рисунке 22.

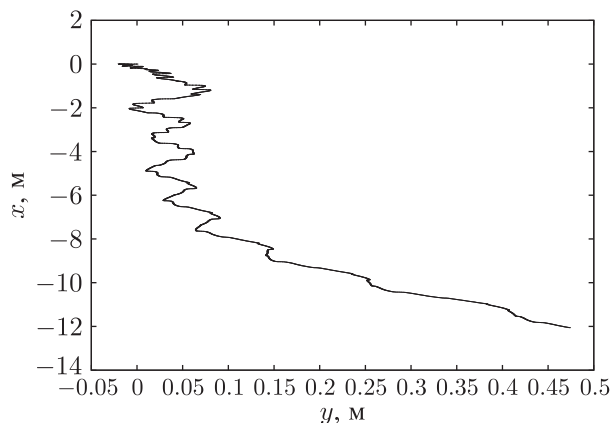


Рис. 22. Траектория тела.

Как видно из рисунка 22, тело погружается и продвигается в направлении, перпендикулярном силе тяжести, но со сменой направления продвижения. Это объясняется вращением тела под действием пары сил «сила тяжести – сила Архимеда». Угловая скорость вращения приведена на рисунке 23.

Колебания угловой скорости постепенно затухают, так как на тело действует момент вязкой силы сопротивления. В противовес движению в вязкой жидкости, при движении в идеальной жидкости затухания вращения происходить не будет.

Таким образом, движение тела в поле силы тяжести требует управления.

6. Обсуждение и постановка задачи

Результаты численного моделирования движения жесткой сферы в жидкости показали возможность направленного перемещения тела за счет изменения геометрии масс. Показано, что при увеличении частоты колебаний внутренней материальной точки увеличивается

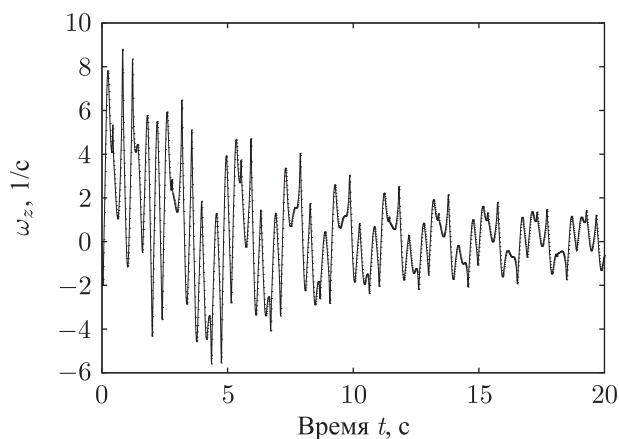


Рис. 23. Траектория тела.

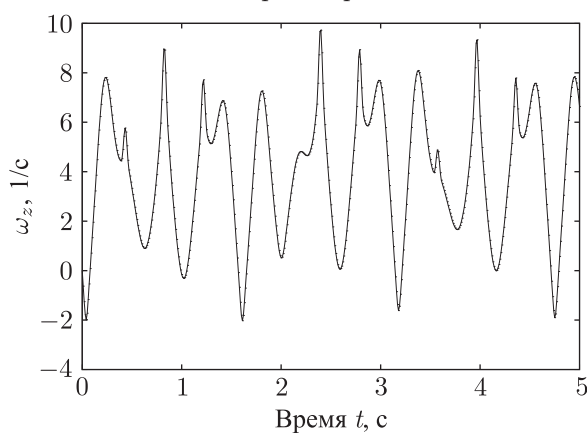


Рис. 24. Траектория тела.

смещение тела и, следовательно, средняя скорость передвижения. Получен характер зависимости сил сопротивления при возвратно-поступательном перемещении внутренней массы. Сфера с плавучестью, близкой к нулевой, может двигаться с преодолением силы тяжести. При колебаниях внутренней массы перпендикулярно силе тяжести тело начинает сильно вращаться и траектория становится непредсказуемой.

Для тел с переменным распределением массы остаются открытыми следующие задачи.

1. Экспериментальное исследование движения, верификация расчетных исследований экспериментальными данными. Выявление зависимостей движения от различных внешних факторов.
2. Трехмерная вязкая гидродинамика вблизи границы раздела сред и твердой поверхности.
3. Численное моделирование движения при турбулизации пограничного слоя методами крупных вихрей и прямого численного моделирования.
4. Управление трехмерным движением по заданной траектории при несимметричных срывах вихрей и ненулевой плавучести.
5. Движение легкого тела по поверхности воды.

Список литературы

- [1] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 576 с.
- [2] Borisov A. V., Kozlov V. V., Mamaev I. S. Asymptotic stability and associated problems of failing rigid body // Regul. Chaotic Dyn., 2007, vol. 12, no. 5, pp. 531–565.
- [3] Borisov A. V., Mamaev I. S. On the motion of a heavy rigid body in an ideal fluid with circulation // Chaos, 2006, vol. 16, no. 1, 013118, 7 pp.
- [4] Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 928 с.
- [5] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
- [6] Lindgren E. R. The motion of a sphere in an incompressible viscous fluid at Reynolds number considerably less than one // Phys. Scripta, 1999, vol. 60, pp. 97–110.
- [7] Гуцин В. А., Матюшин П. В. Математическое моделирование пространственных течений несжимаемой жидкости // Матем. моделирование, 2006, т. 18, № 5, с. 5–20.
- [8] Allen J. J., Jouanne Y., Shashikanth B. N. Vortex with a moving sphere // J. Fluid Mech., 2007, vol. 587, pp. 337–346.
- [9] Tallapragada Ph., Kelly S. Dynamics and self-propulsion of a spherical body shedding coaxial vortex ring in an ideal fluid // Regul. Chaotic Dyn., 2012 (принято к печати).
- [10] Saffman P. G. The self-propulsion of a deformable body in a perfect fluid // J. Fluid Mech., 1967, vol. 28, no. 2, pp. 385–389.
- [11] Galper A. R., Miloh T. Motion stability of a deformable body in an ideal fluid with applications to the N spheres problem // Phys. Fluids, 1998, vol. 10, no. 1, pp. 119–130.
- [12] Galper A. R., Miloh T. Hydrodynamics and stability of a deformable body moving in the proximity of interfaces // Phys. Fluids, 1999, vol. 11, no. 4, pp. 795–806.
- [13] Lighthill M. J. On the squirming motion of nearly spherical deformable bodies through liquids at very small Reynolds numbers // Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, no. 2, pp. 109–118.
- [14] Koiller J., Ehlers K., Montgomery R. Problems and progress in microswimming // J. Nonlinear Sci., 1996, vol. 6, pp. 507–541.
- [15] Черноусько Ф. Л. О перемещении тела в жидкости за счет колебаний присоединенного звена // ДАН, 2010, т. 431, № 1, с. 46–49.
- [16] Черноусько Ф. Л. Оптимальное перемещение многозвенной системы в среде с сопротивлением // Тр. инст. матем. и механ. УрО РАН, 2011, т. 17, № 2, с. 240–255.
- [17] Guasto J. S., Johnson K. A., Gollub J. P. Oscillatory flows induced by microorganisms swimming in two dimensions // Phys. Rev. Lett., 2010, vol. 105, 168102, 4 pp.
- [18] Hieber S. E., Koumoutsakos P. An immersed boundary method for smoothed particle hydrodynamics of self-propelled swimmers // J. Comput. Phys., 2008, vol. 227, no. 19, pp. 8636–8654.
- [19] Sahin M., Mohseni K., Colin S. P. The numerical comparison of flow patterns and propulsive performances for the hydromedusae Sarsia sp. and Aequorea victoria // J. Exp. Biol., 2009, vol. 212, pp. 2656–2667.
- [20] Eldredge J. D. Numerical simulations of undulatory swimming at moderate Reynolds number // Bioinspir Biomim., 2006, vol. 1, no. 4, S19–S24.
- [21] Eldredge J. D., Colonius T., Leonard A. A vortex particle method for two-dimensional compressible flow // J. Comput. Phys., 2002, vol. 179, no. 2, pp. 371–399.
- [22] Яцун С. Ф., Безмен П. А., Сапронов К. А., Рублев С. Б. Динамика мобильного вибрационного робота с внутренней подвижной массой // Изв. Курск. гос. техн. ун-та, 2010, т. 31, № 2, с. 21–31.
- [23] Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел // Тр. инст. матем. и механ. УрО РАН, 2010, т. 16, № 5, с. 213–222.
- [24] Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф. Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 4, с. 845–857.

- [25] Childress S., Spagnolie S. E., Tokieda T. A bug on a raft: recoil locomotion in a viscous fluid // J. Fluid Mech., 2011, vol. 669, pp. 527–556.
- [26] Рамоданов С. М., Тененев В. А. Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // Нелинейная динамика, 2011, т. 7, № 3, с. 635–647.
- [27] Ветчанин Е. В., Тененев В. А. Моделирование управления движением в вязкой жидкости тела с переменной геометрией масс // Компьютерные исследования и моделирование, 2011, т. 3, № 4, с. 371–381.
- [28] Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении изменяемого тела в идеальной жидкости // ПММ, 2001, т. 65, № 4, с. 592–601.
- [29] Mougin G., Magnaudet J. The generalized Kirchhoff equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow. // Internat. J. Multiphase Flow, 2002, vol. 28, pp. 1837–1851.
- [30] Calmet I., Magnaudet J. Large-eddy simulation of high-Schmidt number mass transfer in a turbulent channel flow // Phys. Fluids, 1997, vol. 9, no. 2, pp. 438–455.
- [31] Rai M. M., Moin P. Direct simulations of turbulent flow using finite-difference schemes // J. Comput. Phys., 1991, vol. 96, pp. 15–53.
- [32] Mittal R., Dong H., Bozkurttas M., Najjar F. M., Vargas A., vonLoebbecke A. A versatile sharp interface immersed boundary method for incompressible flows with complex boundaries // J. Comp. Phys., 2008, vol. 227, pp. 4825–4852.
- [33] Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа: Учеб. для вузов. 7-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
- [34] OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox: Programmer's Guide: v. 2.1.0, 15th Dec 2011.
- [35] Patankar S. V. Numerical heat transfer and fluid flow. New York: Taylor & Francis Group, 1980. 197 pp.
- [36] Dupeux G., Goff A. L., Quéré D., Clanet C. The spinning ball spiral // New J. Phys., 2010, vol. 12, 093004, 12 pp.
- [37] Козлов В. В., Рамоданов С. М. О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и переменной геометрией масс // ДАН, 2002, т. 382, № 4, с. 478–481.
- [38] Козлов В. В., Онищенко Д. А. О движении тела с жесткой оболочкой и переменной геометрией масс в бесконечном объеме идеальной жидкости. М.: Физматлит, 2003. С. 465–476.

The motion of a body with variable mass geometry in a viscous fluid

Evgeny V. Vetchanin¹, Ivan S. Mamaev², Valentin A. Tenenev³

²Institute of Computer Science;

Laboratory of Nonlinear Analysis and the Design of New Types of Vehicles

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Russia, Moscow

Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS, Russia, Ekaterinburg

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

^{1,3}Izhevsk State Technical University

Studencheskaya 7, Izhevsk, 426069 Russia

¹eugene186@mail.ru, ²mamaev@rcd.ru, ³tenenev@istu.ru

An investigation of the characteristics of motion of a rigid body with variable internal mass distribution in a viscous fluid is carried out on the basis of a joint numerical solution of the Navier–Stokes equations and equations of motion. A non-stationary three-dimensional solution to the problem is found. The motion of a sphere and a drop-shaped body in a viscous fluid, which is caused by the motion of internal material points, in a gravitational field is explored. The possibility of motion of a body in an arbitrary given direction is shown.

MSC 2010: 70Hxx, 70G65

Keywords: finite-volume numerical method, Navier-Stokes equations, variable internal mass distribution, motion control

Received April 13, 2012, accepted October 21, 2012

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2012, vol. 8, no. 4, pp. 815–836 (Russian)